

## ЛИТЕРАТУРА

1. Горлов С.И. Численные методы решения нелинейных нестационарных задач о генерации волн погруженным в жидкость телом // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3. – № 6. – С. 9–20.
2. Горлов С.И. Нелинейная задача о волнах, возникающих на границе раздела сред, при одновременных разгонных и колебательных движениях кругового цилиндра // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3. – № 6. – С. 21–29.
3. Горлов С.И. Нестационарная нелинейная задача о горизонтальном движении контура под границей раздела двух жидких сред // ПМТФ. – 1999. – Т. 40. – № 3. – С. 35–41.
4. Baker G.R., Meiron D.I., Orszag S.A. Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J. Fluid Mech. – 1982. – V. 123. – P. 477–501.

## ПОСТРОЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ ТОЛЩИНЫ И НАГРУЗКИ

С. А. Долганов, А. В. Поташев

НИИММ Казанского государственного университета  
andrey.potashev@ksu.ru

Отыскание формы гидродинамических решеток так же, как и изолированных профилей, возможно на основе теории обратных краевых задач аэрогидродинамики. Получившие наибольшее практическое применение результаты решения таких задач содержатся в работах Г.Ю.Степанова (см. [1]), где построение профиля решетки осуществлено по заданному на контуре профиля годографу скорости  $v = v(\theta)$ . Известны различные методы решения задачи при параметризации исходных данных как функции дуговой абсциссы  $s$  (см., напр., [2]). В настоящей работе рассматривается задача построения профиля гидродинамической решетки по распределениям толщины и нагрузки как функциям абсциссы  $x$ . Задание распределения толщины вместе с распределением нагрузки позволяет удовлетворить прочностным характеристикам

лопатонок. Предлагаемый численно-аналитический метод построения решетки профилей основан на методах, предложенных в [2] и [3]. Приведены результаты тестовых расчетов, показывающие сходимость итерационного процесса, и пример расчета профилей решетки.

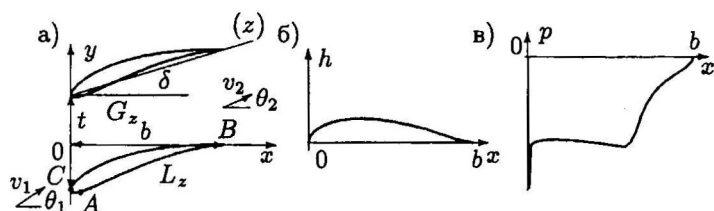


Рис. 1

**1. Постановка задачи.** Искомая прямая однорядная гидродинамическая решетка заданного шага  $t$  и глубины  $b$  состоит из профилей с непроницаемым контуром  $L_z$ , гладким за исключением задней кромки, являющейся точкой возврата. Декартова система координат в физической плоскости  $z = x + iy$  задана так, что ось  $Oy$  параллельна фронту решетки и касается передних кромок профилей в точке  $C$ , а ось  $Ox$  проходит через заднюю кромку  $B$  одного из профилей (рис. 1,а). Требуется найти форму  $L_z$ , если известно распределение толщины профиля  $h(x)$ ,  $x \in [0, b]$  (рис. 1,б) и нагрузки  $p(x)$ ,  $x \in [0, b]$  (рис. 1,в) в предположении, что решетка обтекается плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной плотностью  $\rho$  и скоростью на бесконечности перед решеткой  $\vec{v}_1 = v_1 e^{i\theta_1}$ . Под толщиной профиля  $h(x)$  понимается разность ординат  $y_u$  и  $y_l$  точек контура по верхней и нижней поверхностям, лежащих на одной вертикальной прямой:  $h(x) = y_u(x) - y_l(x)$ . Тогда  $h(x)$  — непрерывная и однозначная функция, причем  $h(x) > 0$  при  $x \in (0, b)$  и  $h(0) = h(b) = h'(b) = 0$ . Распределение нагрузки  $p(x)$  также является непрерывной и однозначной функцией с условием  $p(0) = p(b) = 0$  и представляет собой разность коэффициентов давления  $c_{pu}$  и  $c_{pl}$  по верхней и нижней поверхностям профиля:  $p(x) = c_{pu}(x) - c_{pl}(x)$ . С учетом равенства  $c_p(x) = 1 - (v/v_\infty)^2$  функцию  $p(x)$  можно также выразить через величины скоростей  $v_l$  и  $v_u$  на нижней и верхней поверхностях:  $p(x) = [v_l^2(x) - v_u^2(x)]/v_\infty^2$ . Здесь  $v_\infty$  — модуль средней скорости на бесконечности  $\vec{v}_\infty = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$ ,  $\vec{v}_2 = v_2 e^{i\theta_2}$  — скорость на бесконечности за решеткой.

Отметим, что в такой постановке параметры потока за решеткой ( $v_2$  и  $\theta_2$ ) и величина  $v_\infty$ , связанные с  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\Gamma$  и  $t$  соотношениями

$$v_2 e^{i\theta_2} = v_1 e^{i\theta_1} - i \frac{\Gamma}{t}, \quad v_\infty^2 = v_1^2 - \frac{\Gamma}{t} v_1 \sin \theta_1 + \left( \frac{\Gamma}{2t} \right)^2,$$

известны еще до решения задачи, так как величина циркуляции скорости  $\tilde{\Gamma} = \Gamma/(v_1 t)$  может быть выражена через  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $t$ ,  $\rho$ ,  $b$  и  $p(x)$ :

$$\tilde{\Gamma} = 2 \left[ \sin \theta_1 + \frac{2t \cos \theta_1}{\rho b C_y} - \sqrt{\frac{2t \sin 2\theta_1}{\rho b C_y} + \left( \frac{4t^2}{\rho^2 b^2 C_y^2} - 1 \right) \cos^2 \theta_1} \right],$$

где  $C_y = - \int_0^b p(x) dx$ .

**2. Аналитическое решение.** Решение задачи будем строить в безразмерных переменных, полагая  $\rho = 1$ ,  $b = 1$ ,  $v_\infty = 1$ . При сделанных предположениях существует комплексный потенциал течения  $w = \varphi + i\psi$ . Области течения  $G_z$  в физической плоскости  $z$  с разрезами по линиям тока, сходящим с задних кромок профилей, соответствует вся плоскость  $w$  с полубесконечными разрезами (рис. 2,а), параллельными оси  $\varphi$  и смещенными друг относительно друга на величину  $\Delta w = \Delta\varphi + i\Delta\psi = v_1 t e^{i\theta_1}$ .

Для решения задачи используем метод сопоставления плоскостей, введя в качестве канонической области  $G_\zeta$  над плоскостью  $\zeta$  бесконечно-листную риманову поверхность с точками ветвления  $\zeta = \pm R$  и границей, проекцией которой является окружность единичного радиуса (см. [2]). Тогда решение поставленной задачи будет состоять в определении аналитической во внешности круга функции  $z(\zeta)$ , реализующей конформное отображение  $G_\zeta$  на внешность  $G_z$  искомого профиля с нормировкой

$$z(\pm R) = \pm\infty, \quad z(\zeta_2) = 1, \quad (1)$$

где  $\zeta_2 = e^{i\beta_2}$  — образ задней кромки  $B$  в плоскости  $\zeta$ .

При таком отображении один период области  $G_z$  перейдет во внешность круга  $|\zeta| > 1$ , расположенную на одном листе римановой поверхности (рис. 2,б). Аналогично работе [2] конформное

отображение области  $G_\zeta$  на область  $G_w$  осуществим функцией

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left( \Gamma \ln \frac{\zeta - R}{R\zeta - 1} + \Delta w \ln \frac{\zeta + R}{\zeta - R} + \overline{\Delta w} \ln \frac{R\zeta + 1}{R\zeta - 1} \right) + C, \quad (2)$$

где  $C = \text{const.}$

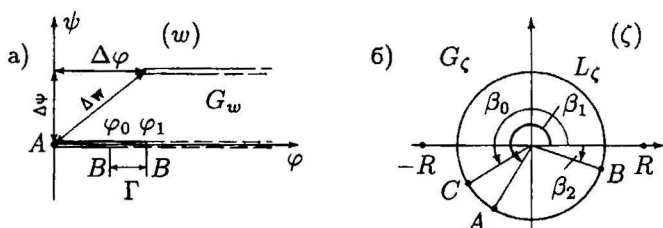


Рис. 2

Производную функции (2) можно привести к виду

$$\frac{dw}{d\zeta} = -v_1 u_0 t e^{-i\beta} \frac{(1 - \zeta_1/\zeta)(1 - \zeta_2/\zeta)}{(\zeta^2/R^2 - 1)[1 - (R\zeta)^{-2}]}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, & \beta &= \arctan(a_1/a_2), \\ \zeta_{1,2} &= (-ia_3 \pm a_4)/[2(a_2 - ia_1)], \\ a_1 &= (2 \cos \theta_1 - \tilde{\Gamma})(R - 1/R), & a_2 &= 2 \sin \theta_1 (R + 1/R), \\ a_3 &= \tilde{\Gamma}(R^2 - 1/R^2), & a_4 &= \sqrt{4(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\zeta_1 = e^{i\beta_1}$  — образ передней критической точки  $A$  на окружности  $\zeta = e^{i\gamma}$ , причем

$$\beta_1 = \beta + \arctan(a_3/a_4) + \pi, \quad \beta_2 = \beta - \arctan(a_3/a_4).$$

Из формул (3), (4) видно, что производная  $w'(\zeta)$  прямо пропорциональна  $v_1$ , а ее выражение зависит от одного безразмерного параметра  $R > 1$ . Распределение скорости на границе канонической области записывается в виде  $U(\gamma) = |dw/d\zeta|_{\zeta=e^{i\gamma}}$ . Используя связь  $dz/d\zeta = (dw/d\zeta)/(dw/dz)$  производных отображающих

функций, с учетом нормировки (1) получим соотношение

$$x(\gamma) = 1 - \int_{\beta_2}^{\gamma} \sqrt{\frac{U^2(\gamma)}{v^2(x(\gamma))} - \left[ \frac{dy(\gamma)}{d\gamma} \right]^2} d\gamma, \quad (5)$$

которое будем использовать для определения функции  $x(\gamma)$  в интервале  $[\beta_2, \beta_0]$ , где  $\beta_0$  – дуговая координата образа точки  $C$  профиля на окружности. В силу предположений, сделанных относительно формы контура профиля, функция  $x(\gamma)$  должна быть непрерывной, иметь два участка монотонности и удовлетворять условиям

$$x(\beta_0) = 0, \quad \frac{dx}{d\gamma}(\beta_0) = 0. \quad (6)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений (6) (с одним неизвестным  $R$ ), модуль скорости  $v_1$  будем считать искомой величиной, не задавая его заранее.

Для нижней стороны контура профиля, исходя из заданного распределения толщины, можно записать:

$$y(\gamma_2) = y(\gamma_1) - t(x(\gamma_1)). \quad (7)$$

Здесь и далее  $\gamma_1 \equiv \gamma \in [\beta_2, \beta_0]$ ,  $\gamma_2 \equiv \gamma \in [\beta_0, \beta_2 + 2\pi]$ , причем  $\gamma_2$  – функция  $\gamma_1$ , определяемая из условия  $x(\gamma_1) = x(\gamma_2)$ .

Далее аналогично работе [3] введем вспомогательную аналитическую в области  $G_\zeta$  и непрерывную в  $\bar{G}_\zeta$  функцию

$$\chi(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta} [(\zeta^2 - R^2)(\zeta^2 - 1/R^2)] = \frac{dz}{d\zeta} \chi_1(\zeta)$$

и, используя условия нормировки (1), запишем соотношения, которые помимо (5) и (7) связывают функции  $x(\gamma)$  и  $y(\gamma)$  на границе области  $G_\zeta$ :

$$x(\gamma) = 1 + \int_{\beta_0}^{\beta_2+2\pi} [\operatorname{Re} \chi_1^{-1}(e^{i\gamma}) q_2(\gamma) - \operatorname{Im} \chi_1^{-1}(e^{i\gamma}) q_2(\gamma)] d\gamma, \quad (8)$$

$$y(\gamma) = \int_{\beta_2}^{\beta_0} [\operatorname{Re} \chi_1^{-1}(e^{i\gamma}) q_1(\gamma) + \operatorname{Im} \chi_1^{-1}(e^{i\gamma}) q_2(\gamma)] d\gamma, \quad (9)$$

где

$$q_1(\gamma) = f_1(\gamma) \cos \gamma - f_2(\gamma) \sin \gamma, \quad q_2(\gamma) = -f_1(\gamma) \sin \gamma - f_2(\gamma) \cos \gamma.$$

Функции  $f_1(\gamma) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma})$ ,  $f_2(\gamma) = \operatorname{Im} \chi(e^{i\gamma})$  определяются из решения смешанной задачи:

$$f_1(\gamma_1) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma_1}) = \frac{dx}{d\gamma}(\gamma_1) q_3(\gamma_1) + \frac{dy}{d\gamma}(\gamma_1) q_4(\gamma_1),$$

$$f_2(\gamma_2) = \operatorname{Im} \chi(e^{i\gamma_2}) = -\frac{dx}{d\gamma}(\gamma_2) q_4(\gamma_2) + \frac{dy}{d\gamma}(\gamma_2) q_3(\gamma_2),$$

где

$$q_3(\gamma) = -\operatorname{Re} \chi_1(e^{i\gamma}) \sin \gamma + \operatorname{Im} \chi_1(e^{i\gamma}) \cos \gamma,$$

$$q_4(\gamma) = \operatorname{Re} \chi_1(e^{i\gamma}) \cos \gamma + \operatorname{Im} \chi_1(e^{i\gamma}) \sin \gamma.$$

Соотношения (5), (7)–(9) совместно с условиями (6) при фиксированном  $\beta_0$  определяют замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений относительно функций  $x(\gamma)$ ,  $y(\gamma)$  и параметров  $R$ ,  $v_1$ , которая решается итерационным методом, разработанным в [3]. Заметим лишь, что распределение скорости по верхней поверхности профиля  $v(x(\gamma_1))$  вычисляется по формуле

$$v(x(\gamma_1)) = \sqrt{v^2(x(\gamma_2)) - p(x(\gamma_1))}.$$

**3. Результаты расчетов.** По описанному выше методу были проведены как тестовые, так и проектировочные расчеты. Тестовые расчеты показали, что результаты, получаемые в предельном случае  $t \rightarrow \infty$ , совпадают с результатами по методу работы [3] для изолированного профиля. Расхождение в координатах профилей не превышает 0.2% длины хорды. Аналогичный порядок погрешности получен и при восстановлении формы профиля решетки по данным, взятым из расчета обтекания известной решетки.

Проектировочные расчеты были проведены при достаточно произвольно заданных распределениях  $h(x)$  (штрих-пунктирная линия на рис. 3,а) и  $p(x)$  (штрих-пунктирная линия на рис. 3,б), причем  $C_y = 0.425$ . При этом задавалась величина  $\theta_1 = 4.5^\circ$ , а шаг решетки менялся (см. таблицу). Формы профилей и распределения скоростей на них для  $t = 0.7$  и  $1.0$  показаны на рис. 3,а и рис. 3,б, соответственно, сплошными и пунктирными линиями.

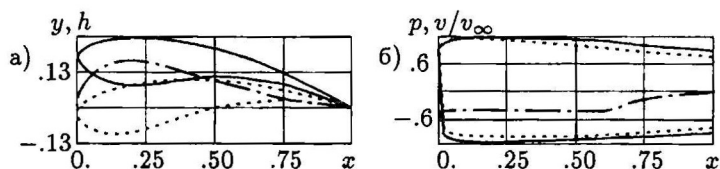


Рис. 3

Из приведенных в таблице данных видно, что уменьшение шага решетки приводит к увеличению скорости  $v_1$  на входе и угла поворота потока  $\Delta\theta = |\theta_2 - \theta_1|$ , к уменьшению угла  $\delta$  (между хордой профиля и осью  $Ox$  (рис. 1,а)), к уменьшению, а затем росту угла атаки  $\alpha$  (угол между хордой профиля и направлением скорости  $\vec{v}_1$ ).

Таблица

$t$	$\beta_0$	$v_1$	$v_2$	$v_\infty$	$\theta_2^\circ$	$\alpha^\circ$	$\Delta\theta^\circ$	$\delta^\circ$
0.7	3.26	1.056	1.054	1.053	-2.47	15.4	6.97	-10.9
0.85	3.21	0.881	0.878	0.878	-1.24	11.5	5.74	-7.0
1.0	3.16	0.769	0.766	0.767	-0.38	3.3	4.88	1.2
5.0	3.11	0.523	0.523	0.523	4.34	8.5	0.16	13.0

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00365).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г.Ю. *Гидродинамика решеток турбомашин*. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.
2. Ильинский Н.Б., Исмагилова Г.Р., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи для гидродинамических решеток профилей*. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – Препринт N 94-3. – 84 с.
3. Долганов С.А., Ильинский Н.Б., Поляков Д.В. *Построение крылового профиля по заданным распределениям толщины и нагрузки* // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1999. – N 1. – С. 25-28.